BOZZA INCOMPLETA

Indici di potere in politica e in finanza: qualche spunto (*)

Gianfranco Gambarelli (**)

Sunto. Le possibilità di contrattazione dei Paesi membri del Parlamento Europeo o dei partiti politici nel Comune di Verdello, il valore contrattuale dei millesimi di un condominio, il peso di un pacchetto di controllo azionario su un'azienda, il voto dei membri del Comitato Olimpico Internazionale possono essere descritti con gli stessi modelli matematici: gli indici di potere. Una caratteristica comune a quanto sopra è infatti la possibilità, per ogni "giocatore", di ottenere certe maggioranze coalizzandosi con altri. Lo studio degli indici di potere consente la costruzione di modelli efficienti per previsioni e simulazioni in ambito politico, economico e finanziario.
In questo lavoro si farà una sintesi dei risultati in merito ottenuti nell'Università di Bergamo (già usciti su pubblicazioni di vario tipo) e si daranno alcune idee per ulteriori sviluppi.

(*) Questo lavoro è finanziato dal MIUR (fondi 60%).
(**) Dip.di Matematica, Statistica, Informatica e Applicazioni "Lorenzo Mascheroni", Università degli Studi di Bergamo, via dei Caniana 2, 24127 Bergamo. www. unibg. it/dmsia/staff/gambar.html.

INDICE

1) Introduzione

La formazione della coalizione di maggioranza è spesso di difficile spiegazione perfino per gli stessi protagonisti, in quanto si basa su molteplici fattori: da semplici dati numerici a simpatie e antipatie, affinità e lontananze, influenze esterne, abilità, psicologia. Risulta di solito difficile formulare previsioni sul tema; ciò non toglie che qualche tentativo possa essere fatto. In un primo approccio è opportuno limitarsi alla sola gestione dei dati più facilmente quantificabili, che siano in grado di cogliere il nocciolo del fenomeno e di fornire una solida base per successivi miglioramenti.

2) Un esempio

Consideriamo un Paese ove vi siano tre soli partiti politici, *A*, *B e C*, con la seguente ripartizione di seggi: 30% ad *A* e *B* e 40% a *C*. Se non vi sono particolari propensioni od avversioni per certe alleanze, è facile constatare che tutti e tre sono sullo stesso piano agli effetti delle possibili coalizioni di maggioranza semplice. Possiamo quindi assegnare un "potere coalizionale" paritetico, cioè del $33,\bar{3}$% a ciascuno. La stessa situazione si presenterebbe se *A* e *B* avessero il 49% dei seggi ciascuno e *C* il 2%: quest'ultimo partito avrebbe infatti, pur con un potere nominale molto basso, un potere reale uguale a quello degli altri. Se invece *A* avesse da solo il 51% del peso, il suo potere sarebbe del 100% (cioè 1). Che dire se la ripartizione dei seggi è 50% per *A*, 30% per *B* e 20% per *C* ? In questo caso *A* non possiede da solo la maggioranza; d'altra parte ciascuno degli altri due partiti ha bisogno di coalizzarsi con *A*, in quanto la coalizione fra *B* e *C* è minoritaria. E' intanto facile intuire che questi ultimi, pur avendo diverse quantità di seggi, sono in ugual posizione di potere; è anche presumibile che *A* abbia un potere maggiore, data la sua posizione prioritaria; ma potremo calcolare una ripartizione di (2/3, 1/6, 1/6), secondo il modello di Shapley e Shubik, o di (3/5, 1/5, 1/5), secondo quello di Martin, Banzhaf e Coleman, o che altro ?

3) Alcune definizioni preliminari

Sia $N = \{1,..., n\}$ l'insieme dei giocatori di un gioco cooperativo. Si dice che tale gioco è espresso in forma caratteristica v sse ad ogni possibile coalizione S fra membri di N è associato un numero reale $v(S)$ (la vincita), con la convenzione che alla coalizione vuota è associata una vincita nulla: $v(\varnothing) = 0$.

Ogni gioco in forma caratteristica si dice semplice sse la sua funzione caratteristica può valere solo 0 o 1.

Ogni gioco semplice si dice di maggioranza ponderata sse la sua funzione caratteristica è definita da n numeri reali $w_1, ..., w_n$ (che esprimono i pesi dei giocatori), con somma totale t, e da una quota di maggioranza q ($> t/2$), secondo la regola:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel primo caso si dice che la coalizione S *è* maggioritaria, o vincente; nel secondo caso che è minoritaria, o perdente. Il gioco si rappresenta usualmente con il simbolo $[q; w_1, ..., w_n]$ ovvero con $[q; w]$.

Per tornare all'ultimo esempio del paragrafo 2, $N = \{A, B, C\}$, $w_A = 50$, $w_B = 30$, $w_C = 20$, $t = 100$, $q = 51$, pertanto il gioco si rappresenta come [51; 50, 30, 20]. Le coalizioni vincenti sono (A, B), (A, C) e (A, B, C) mentre le coalizioni perdenti sono ø, (A), (B), (C) e (B, C).

Un valore per un gioco in forma caratteristica v è una funzione atta a rappresentare una ragionevole aspettativa a priori della ripartizione della vincita globale $v(N)$ fra gli n giocatori. Sono stati proposti diversi valori, che esprimono tale previsione sulla base di diversi modelli assiomatici e/o di contrattazione. Più recentemente il concetto di "valore" è stato esteso anche ad altre interpretazioni, ad esempio per ripartizioni eque in contesti normativi.

Un indice di potere è un valore per giochi semplici.

Negli esempi del paragrafo precedente, la vincita (il "potere") della coalizione globale vale uno: $v(A, B, C) = 1$. E' ovvio che, se si considerano equiprobabili tutte le possibili coalizioni, un indice di potere attendibile deve attribuire al gioco [51; 30, 30, 40] la ripartizione di potere (1/3, 1/3, 1/3); analogamente per il gioco [51; 49, 49, 2]. E' altresì ovvio che un buon indice deve attribuire al gioco [51; 51, 39, 10] la ripartizione di potere (1, 0, 0) ma non è così facile assegnare al gioco [51; 50, 30, 20] una ripartizione della vincita globale. Come procedere? Una strada naturale si basa sul concetto di crucialità. Si dice che l'i-esimo giocatore è cruciale per la coalizione S sse $v(S) = 1$ e $v(S \setminus \{i\}) = 0$, cioè la coalizione S è vincente, ma diviene perdente nel caso in cui tale giocatore la abbandoni.

Nell'esempio appena visto, il giocatore A è cruciale per le coalizioni (A, B), (A, C) e (A, B, C); il giocatore B è cruciale solo per la (A, B) e il giocatore C solo per la (A, C).

4) Gli indici di Martin-Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik

L'indice *ß* di Martin-Banzhaf-Coleman [1965-64] assegna ad ogni giocatore una quota proporzionale al numero di coalizioni per cui egli è cruciale. Tale indice è per lo più noto come "indice normalizzato di Banzhaf" [1965]; ha però importanti precursori in Coleman [1964] e Luther Martin, come osservato da Riker in [1986].

Nel caso dell'ultimo esempio *A* è cruciale per 3 coalizioni, mentre *B* e *C* sono cruciali ciascuno per una coalizione. Quindi *ß*$_A$ = 3/5, *ß*$_B$ = *ß*$_C$ = 1/5.

L'indice Φ di Shapley-Shubik [1954] è una particolarizzazione, per giochi semplici, del valore di un gioco secondo Shapley [1953]. Tale indice assegna ad ogni giocatore una vincita attesa data dalla probabilità che egli si trovi in una posizione cruciale, in fase di aggiunta ad una coalizione già costituita.

Se ad esempio (v. Tab. 1) inizialmente v'è la coalizione formata dal solo giocatore *A* e ad essa si unisce il giocatore *B*, la nuova coalizione (*A*,*B*) diviene maggioritaria e pertanto *B* è cruciale per tale coalizione (v. prima riga). Analogamente (v. seconda riga) se alla coalizione del solo *A* si unisce *C*, quest'ultimo rende maggioritaria per (*A*, *C*). Negli altri quattro casi, è *A* il giocatore cruciale per la coalizione in formazione.

	A	B	C	
A ← **B** ← C		x		
A ← **C** ← B			x	
B ← **A** ← C	x			
B ← C ← **A**	x			
C ← A ← **B**	x			
C ← B ← **A**	x			
totali	4	1	1	= 6

Tab. 1: formazione dell'indice di Shapley-Shubik.

Dai totali si deduce quindi che l'indice di Shapley-Shubik è 4/6 per *A* e 1/6 per *B* e *C*, cioè $\Phi = (2/3, 1/6, 1/6)$.

In sostanza, la differenza fra l'indice di Martin-Banzhaf-Coleman e quello di Shapley-Shubik sta nel modello di contrattazione: il primo prescinde dall'ordinamento con cui si forma la coalizione vincente, mentre il secondo ne tiene conto (tecnicamente, il primo lavora sulle

combinazioni e il secondo sulle permutazioni).
Nel caso dell'indice di Shapley-Shubik, v'è una formula che consente di evitare i calcoli della tabella 1. Tale formula, ottenuta da Shapley in [1953], assegna all'i-esimo giocatore il potere

$$\Phi_i = \frac{1}{n!}\sum (s-1)!(n-s)!$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le coalizioni di s membri per cui l'i-esimo giocatore è cruciale. Nel caso dell'esempio,

$$\Phi_A = \frac{1}{3!}\Big((2-1)!\cdot(3-2)!\cdot \underset{\overset{\uparrow}{(A,B)\,+\,(A,C)}}{2} + (3-1)!\cdot(3-3)!\cdot \underset{\overset{\uparrow}{(A,B,C)}}{1}\Big)$$

$$\Phi_B = \Phi_C = \frac{1}{3!}\big((2-1)!\cdot(3-2)!\cdot 1\big) = \frac{1}{6}$$

Oltre alle succitate caratteristiche di ordinamento che distinguono l'indice di Martin-Banzhaf-Coleman da quello di Shapley-Shubik, va precisato che il primo indice non è in generale monotòno: può cioè accadere che, se un giocatore aumenta il suo peso a danno di un altro, il suo indice di Martin-Banzhaf-Coleman diminuisca. Un semplice esempio può provare quanto sopra: nel gioco a 5 persone [9; 5, 5, 1, 1, 1] ciascuno degli ultimi tre giocatori è "dummy", cioè non è cruciale per alcuna coalizione. La ripartizione del potere è quindi facile da calcolare: (1/2,1/2, 0, 0, 0). Se il primo giocatore acquisisce un'unità di peso dal secondo, il gioco diviene [9; 6, 4, 1, 1, 1] e l'indice di Martin-Banzhaf-Coleman (9/19, 7/19, 1/19, 1/19, 1/19). Pertanto il primo giocatore aumenta di peso a spese del secondo, ma si vede ridurre il potere (secondo Martin-Banzhaf-Coleman) da 1/2 a 9/19.

V'è peraltro una versione non normalizzata dell' indice di Martin-Banzhaf-Coleman "fortemente monotòna" (secondo la definizione più restrittiva data in [Gambarelli, 1983]), ma non ci dilunghiamo ulteriormente sull'argomento. Ci basti sapere che Emanuela Sagonti, provò in [1991] che l' indice di Shapley-Shubik, insieme ad altri indici meno noti (e a quello di Martin-Banzhaf-Coleman per giochi con meno di quattro giocatori) è fortemente monotòno. Nota riservata ai soli esperti: un altro pregio dell'indice di Shapley-Shubik, che manca in generale a quello di Martin-Banzhaf-Coleman, è l' appartenenza al "core" in tutti i giochi convessi. Per molti dei motivi suesposti l'indice di Shapley-Shubik appare più adatto a descrivere situazioni di compravendite azionarie con coalizioni già costituite che mutano struttura, mentre quello di Martin-Banzhaf-Coleman è ritenuto più indicato per utilizzi prescrittivi: ad esempio per sistemi elettorali, ove entra in gioco la pura proporzionalità. In particolare, Rydqvist ha rilevato in [1985] una forte vicinanza fra l'indice di Shapley-Shubik e le quotazioni dei titoli in presenza di scalate al controllo azionario nel mercato svedese.

Una caratterizzazione assiomatica dell'indice di Shapley-Shubik (cioè un insieme di requisiti che quel solo indice è in grado di rispettare) è stata fornita da Dubey in [1975a]; una caratterizzazione dell'indice di Martin-Banzhaf-Coleman è stata fornita da Owen in [1978]. Per altri indici meno noti e utilizzati rimando a [Gambarelli, 1994b e 1999], [Gambarelli e Holubiec, 1994] e [Gambarelli e Owen, 1994b].

5) Una prima applicazione

La tabella 2 riporta gli indici di Martin-Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik relativi alle elezioni italiane della Camera dei Deputati nel passaggio dalla X alla XI legislatura (i calcoli sono stati effettuati mediante gli algoritmi riportati rispettivamente in [Gambarelli, 1996] e [Mann, Shapley, 1962]).

Prima di addentrarci nell'esame dei risultati numerici, facciamo qualche osservazione sull'attendibilità, in ambito politico, dei modelli considerati. E' ovvio che alcune coalizioni possibili in teoria non sono in realtà attuabili: ad esempio quelle fra estrema destra ed estrema sinistra. Per la corretta applicazione di un indice è quindi necessario eliminare, dal computo delle crucialità di ogni giocatore, tutte le coalizioni non attendibili (in generale ciò comporta un aumento del potere per i giocatori più "graditi", a spese di quelli più isolati). In effetti Owen ha proposto delle generalizzazioni all'indice di Shapley-Shubik (in [1977]) e di Martin-Banzhaf-Coleman (in [1981]), per il caso si possano stabilire delle probabilità a priori sulla formazione delle varie coalizioni. La pura applicazione degli indici originari può peraltro aver senso in alcune situazioni ove i dati numerici acquistano un valore preponderante: referendum, elezioni presidenziali ecc. Vedremo più avanti che vi sono poi importanti applicazioni anche in altri campi.

Osserviamo ora la tabella 2. Al di là di considerazioni di minore rilevanza, appare intanto interessante il fatto che la DC abbia diminuito il numero dei seggi (da 234 a 206) e aumentato il potere decisionale secondo entrambi gli indici. La diversa distribuzione dei seggi ha quindi favorito tale partito a danno di altri.

Una seconda osservazione riguarda il confronto fra PDS e PSI nella X legislatura. Si può notare che il primo partito, pur avendo un numero di

Partito	X legislatura			XI legislatura		
	Seggi	Ba.Co.	Sh.Sh.	Seggi	Ba.Co.	Sh.Sh.
DC	234	35.3	39.3	206	42.7	41.6
PDS	177	21.2	22.1	107	13.3	15.5
PSI	94	21.2	22.1	92	13.0	13.8
Lega Lom.	1	1.3	0.1	55	8.4	7.1
Rif. Com.	0	-	-	35	4.6	4.2
MSI	35	3.9	5.1	34	4.5	4.1
PRI	21	6.5	2.8	27	3.5	3.4
PLI	11	2.0	1.5	17	2.3	2.3
PSDI	17	2.7	2.0	16	2.1	2.1
Verdi	13	2.3	1.7	16	2.1	2.1
Rete	0	-	-	12	1.6	1.5
Pannella	13	2.3	1.7	7	0.9	1.0
SVP	3	0.5	0.3	3	0.5	0.7
Altri	8+1+1+1	0.8	1.3	1+1+1	0.5	0.6
TOTALI	630	100.0	100.0	630	100.0	100.0

Tab. 2: indici di Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik nella Camera dei Deputati in Italia.

seggi quasi doppio del secondo, ha lo stesso potere (anche se con valori numerici diversi a seconda dell'indice considerato). La spiegazione è intuibile, se si ricorda la classica situazione (49, 49, 2) in cui il terzo partito ha un potere coalizionale uguale a quello degli altri due. Restano peraltro degli interessanti interrogativi: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Martin-Banzhaf-Coleman e magari altri indici hanno comportamenti simili, pur con valori numerici diversi? Come utilizzare queste proprietà nelle applicazioni? Qualche risposta verrà data nei paragrafi seguenti.

6) Applicazioni finanziarie

Cambiando contesto, immaginiamo che i partiti della tabella 2 siano investitori proprietari di azioni ordinarie di un'azienda. Notiamo che l' "azionista PDS" si trova a possedere molte azioni in più rispetto all' "azionista PSI", pur con lo stesso potere decisionale. Può allora valutare la possibilità di vendere parte delle azioni che non gli servono per il controllo e acquistarne altre in altre compagnie, per migliorare in esse la sua posizione di potere. Più in generale, può domandarsi se esista un modello matematico di compravendite azionarie, in grado di fornirgli la massima aspettativa di successo nel controllo su varie aziende. Il problema, di rilevanza facilmente intuibile per via dei notevoli capitali coinvolti, fu risolto negli anni ‘80 grazie alla teoria degli indici di potere. Con l’ occasione furono anche evidenziati alcuni comportamenti comuni ai vari indici, in risposta agli ultimi quesiti del paragrafo precedente. Inizieremo a considerare i casi più semplici (due azionisti) per poi generalizzare a tre e successivamente a n *giocatori.*

6.1) Gioco fra due persone

Supponiamo che le azioni di una compagnia siano inizialmente distribuite fra due soli azionisti nella proporzione 75% e 25%. In tal caso, per tutte le delibere che richiedono la maggioranza del 51%, il primo azionista è da solo maggioritario e pertanto l’indice di potere (comunque sia definito, purché rispetti ragionevoli principi di verosimiglianza) è (1, 0). Se invece la suddivisione delle quote è 10 e 90, l’indice è (0, 1). Se infine le azioni del primo sono il 50.5% e quelle del secondo il 49.5%, l’indice conseguente è (1/2, 1/2) (osserviamo che l’esempio è te orico, in quanto la quota di maggioranza richiesta per le delibere assembleari è di solito il minimo intero superiore al 50% e può quindi risultare, ad esempio, il 50.001%). In generale, detti w_1 *e* w_2 i pesi dei due azionisti (con le convenzioni $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ e $w_1 + w_2 = 100$), l’insieme dei punti del piano cartesiano che rappresentano le possibili ripartizioni delle azioni consiste nel segmento obliquo in fig. 1. Notiamo che in tutti i punti di ascissa maggiore o uguale a 51 l’indice di potere è (1, 0); in tutti quelli di ascissa minore o uguale a 49 è (0, 1) e negli altri punti

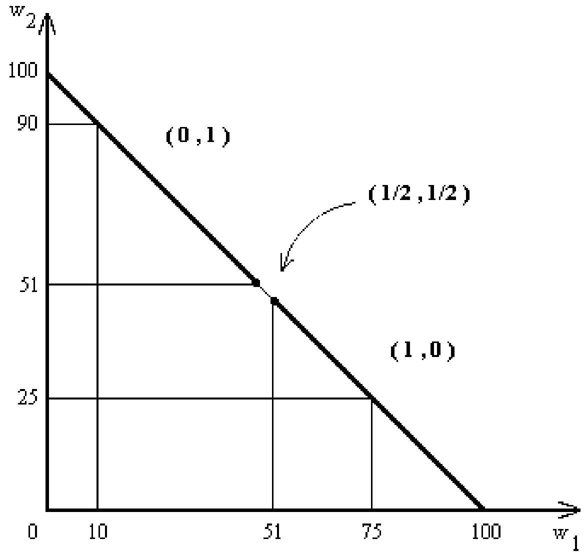

fig. 1

(1/2, 1/2). Supponiamo che, partendo dalla posizione (75, 25), il primo azionista venda azioni al secondo (v. fig. 2). Fintantoché il punto si mantiene sul segmento in basso a destra (estremi inclusi), il potere rimane invariato e pertanto il decremento di potere $\Delta\Phi$ del primo azionista è nullo. Se il punto arriva nel segmento centrale, $\Delta\Phi = ½$, mentre se lo oltrepassa, risulta $\Delta\Phi=1$.

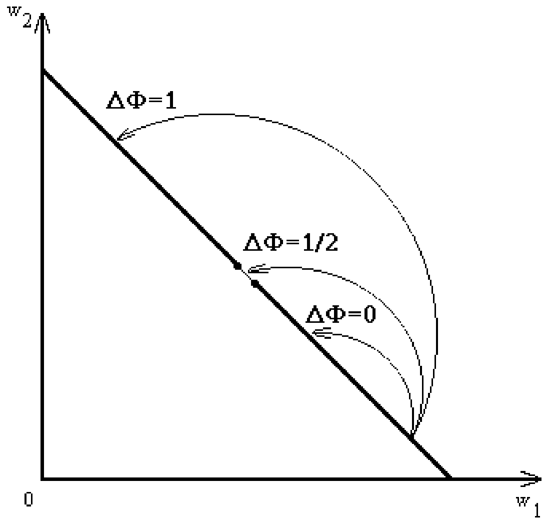

fig. 2

6.2) Gioco fra tre persone

Passiamo al caso di tre giocatori *A*, *B* e *C* (v. fig. 3). Indichiamo w_i il peso dell' *i*-esimo azionista, al variare di *i* da 1 a 3, con le convenzioni $w_i \geq 0$ e $t = \Sigma\, w_i = 100$. Per la prima convenzione, il vettore *w* dei pesi appartiene al piano passante per i punti (100, 0, 0), (0, 100, 0) e (0, 0, 100); più in particolare, per la seconda convenzione, tale vettore appartiene al triangolo con vertici nei punti succitati. Per semplicità di disegno, consideriamo il gioco limite, al tendere a 50 della quota di maggioranza *q*. Consideriamo il piano parallelo al primo e al terzo asse, passante per il punto (0, 50, 0). In tutti i punti alla destra di tale piano il secondo giocatore ha, da solo, la maggioranza e quindi in tali punti il suo potere è 1. Sul nostro triangolo possiamo quindi evidenziare il triangolino di vertici (0, 100, 0), (50, 50, 0) e (0, 50, 50) ove l'indice di potere vale (0, 1, 0) (ad eccezione, naturalmente, del lato congiungente

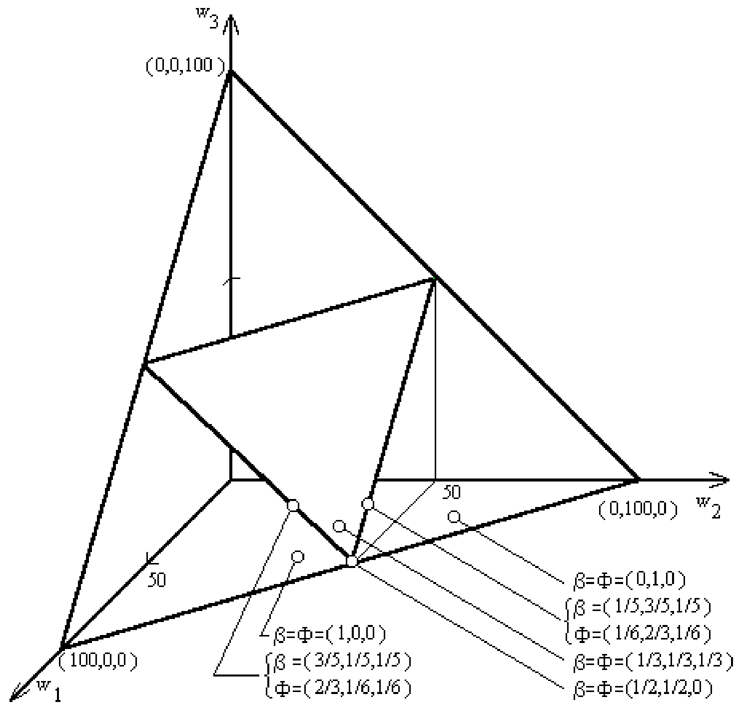

fig. 3

gli ultimi due vertici). Per lo stesso motivo l'indice vale (1, 0, 0) in tutti i punti dell'analogo triangolino con vertice in (100, 0, 0) e vale (0, 0, 1) in tutti i punti dell'analogo triangolino con vertice in (0, 0, 100). E' inoltre facile verificare che l'indice vale (1/3, 1/3, 1/3) in tutti i punti del triangolino centrale (lati esclusi). Per quanto riguarda i lati, nei punti interni si hanno valori diversi a seconda dell'indice usato. Ad esempio, in quello congiungente i vertici (50, 50, 0) e (0, 50, 50) l' indice di Martin-Banzhaf-Coleman vale (1/5, 3/5, 1/5), mentre quello di Shapley-Shubik vale (1/6, 2/3, 1/6); analogamente per gli altri. Nei vertici del triangolino centrale l'indice vale (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/) e (0, 1/2, 1/2). Notiamo infine che, per q significativamente maggiore di 50, nel disegno si vedrebbero suddivisioni del triangolo grande non solo in triangolini, ma anche in trapezi (si può verificare che vi sono tre tipi di disegni, a seconda che q sia maggiore, minore o uguale a $2t/3$). In ciascuno di tali poligoni il gioco è costante, agli effetti delle coalizioni per cui ogni giocatore è cruciale. Possiamo ora intuire la risposta ad uno degli interrogativi posti alla fine del quinto paragrafo: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Martin-Banzhaf-Coleman e magari altri indici hanno comportamenti simili, pur con valori numerici diversi?

6.3) Gioco fra *n* persone

E' ora possibile immaginare una generalizzazione di quanto visto finora, al caso di giochi con *n* persone. Il triangolo della figura 3 diviene un simplesso dello spazio euclideo *n*-dimensionale, con vertici in tutti i punti tali che una delle componenti sia *t* (nel nostro caso *t*=100) e tutte le altre nulle. Tale simplesso viene suddiviso in poliedri convessi dagli iperpiani paralleli a quelli principali e da essi distanti *q* e *t* - *q*. In ciascuno di tali poliedri il gioco resta costante, agli effetti delle coalizioni per cui ogni giocatore è cruciale; pertanto, una volta scelto un indice di potere atto a rappresentare la situazione reale esaminata, in tutti i punti di ogni poliedro tale indice resta invariato (per la dimostrazione v. [Gambarelli, 1983]).

6.4) Scambio di quote fra due giocatori

Supponiamo che la distribuzione iniziale di azioni fra i giocatori *A*, *B* e *C* di un gioco a tre persone con maggioranza semplice, sia (51, 40, 9) (v. tab. 3). Ovviamente una qualsiasi compravendita di azioni fra *B* e *C* non muta la situazione, in quanto *A* resta maggioritario. Valutiamo allora quello che accade in compravendite fra *A* e *C*. Se C acquista un'azione da *A*, la distribuzione delle azioni diviene (50, 40, 10) e quella del potere (in termini di indice di Shapley-Shubik) diviene (2/3, 1/6, 1/6). Se invece *C* acquista 2 azioni da *A*, la distribuzione delle azioni diviene (49, 40, 11) e quella del potere (1/3, 1/3, 1/3). La ripartizione del potere resta la stessa anche se *C* acquista 40 azioni da *A*, perché in tal caso le azioni diventano (11, 40, 49) e ogni giocatore è nella stessa posizione degli altri rispetto alle possibili coalizioni di maggioranza. La situazione cambia solo se *C* acquista 41 azioni da *A*: in tal caso la distribuzione diventa (10, 40, 50) e il potere di *C* sale a 2/3. Con un'ulteriore azione, *C* acquisisce la maggioranza da solo e il suo potere sale al 100%. Come si vede dalla sintesi, il potere di *C* è una funzione a scala monotòna del numero di azioni acquistate da *A*; gli stocks critici che fanno passare *C* da una posizione di potere alla successiva sono 9, 10, 11, 50 e 51.

Nella figura 4 possiamo osservare lo spostamento del vettore delle azioni, nel corso di una compravendita fra *A* e *C*. Poiché il numero di azioni di *B* resta invariato, la relativa componente è costante e pertanto il punto si muove su un piano parallelo al piano $w_A w_C$. Il segmento risultante incontra i lati del triangolino centrale in due punti, determinando la funzione a scala (evidenziata in alto a sinistra del disegno) che esprime l'aumento del potere di *C* in funzione del numero di azioni acquistate

giocato-re.	n. di azioni che C compe-ra da A	distribuzione delle azioni risultante	distribuzione del potere risultante	aumento del potere di C
A B C	0	51 40 9	1 0 0	0
A B C	1	50 40 10	2/3 1/6 1/6	1/6
A B C	2	49 40 11	1/3 1/3 1/3	1/3
A B C	41	10 40 50	1/6 1/6 2/3	2/3
A B C	42	9 40 51	0 0 1	1
Sintesi				
con un'azione		acquistata:		+ 16.7 %
da 2 a 40 azioni		acquistate:		+ 33.3 %
con 41 azioni		acquistate:		+ 66.7 %
da 42 a 51 azioni		acquistate:		+100.0 %

Tab. 3: scambio di quote fra due giocatori

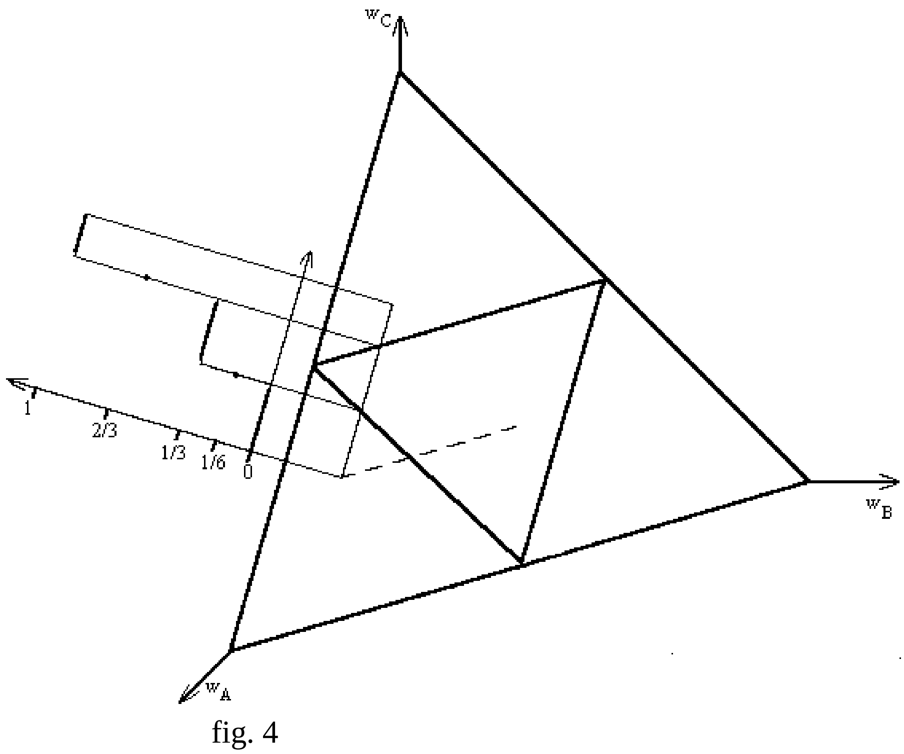

fig. 4

da *A*. Dalla figura si nota anche facilmente come uno stesso numero di azioni scambiate possa dare diversi risultati, in termini di indice di potere, a seconda dell'acquirente. Se infatti *A* vende le stesse azioni a *B* invece che a *C*, il suo potere passa da 1 a 1/3 (v. segmento tratteggiato), invece che da 1 a 0. E' quindi importante conoscere, oltre che i punti di discontinuità della funzione a scala (cioè gli stocks critici di azioni), anche il partner più pericoloso nella compravendita. Risultati in merito, per il caso generale di compagnie con *n* azionisti, si sono ottenuti in [Gambarelli e Szegö, 1982].

Se, invece di utilizzare l'indice di Shapley-Shubik, ci serviamo di quello di Martin-Banzhaf-Coleman, le variazioni del potere cambiano, ma gli stocks critici restano gli stessi (può peraltro capitare che taluni stocks non inducano un aumento del potere, per via della mancanza di forte monotonìa in quest'ultimo indice). In [Gambarelli, 1983] è stato provato che, comunque si definisca un indice di potere (purché fortemente monotòno), la sequenza degli stocks critici corrispondenti a scambi di azioni fra due giocatori *i* e *j* è sempre la stessa. Le formule che generano tali stocks d_s in società di *n* azionisti sono le seguenti:

$$d_S = q - \sum_{h=1}^{n} b_h w_h \qquad \text{e} \qquad d_S = t - q - \sum_{h=1}^{n} b_h w_h$$

ove *b* è un vettore *n*-dimensionale, le cui componenti assumono i soli valori 0 e 1 nella condizione $b_i = b_j = 0$.

Le due sommatorie sono inoltre soggette al seguente vincolo:

$$-H < \sum_{h=1}^{n} b_h w_h < H$$

dove *H* è il minimo fra *q* e (*t*-*q*).

Nel caso dell'esempio, $t = 100$, $q = 51$, t-$q = 49$, $i = 1$ e $j = 3$. Gli unici vettori binari da considerarsi sono (0,0,0) e (0,1,0). Dalle formule di cui sopra si ottengono i valori 10, 11, 50 e 51, che generano le sequenze (51, 50, 49, 10, 9) per *A* e (9, 10, 11, 50, 51) per *C*.

6.5) Scambio di quote fra un giocatore e l'oceano

Supponiamo che una compagnia sia composta da tre grossi azionisti *A*, *B* e *C* e da un "oceano" di piccoli azionisti disinteressati o impossibilitati ad entrare direttamente nella lotta per il controllo. Sia inizialmente (20, 15, 4) la ripartizione delle azioni fra i grossi giocatori (v. tab. 4).

gioc.	n. di azioni comperate da C	distribuzione delle azioni risultante	maggioranza risultante (A+B+C)/2	distribuzione del potere risultante
A		20		1
B		15		0
C	0	4	19.5	0
A		20		2/3
B		15		1/6
C	1	5	20	1/6
A		20		1/3
B		15		1/3
C	2	6	20.5	1/3
A		20		1/3
B		15		1/3
C	30	34	34.5	1/3
A		20		1/6
B		15		1/6
C	31	35	35	2/3
A		9		0
B		40		0
C	32	36	35.5	1

Sintesi			
con	un'azione	acquistata:	+ 16.7 %
da	2 a 30 azioni	acquistate:	+ 33.3 %
con	31 azioni	acquistate:	+ 66.7 %
con	32 e più azioni	acquistate:	+100.0 %

Tab. 4: scambio di quote fra un giocatore e l’oceano

Che succede se il terzo azionista inizia ad acquistare azioni sul mercato dei piccoli, per aumentare il suo potere di controllo sulla compagnia? Se *C* acquista un’azione dall’oceano, la distribuzione delle azioni diviene (20, 15, 5) e quella dei poteri (in termini di Shapley-Shubik) diviene (2/3, 1/6, 1/6), in quanto la quota di maggioranza passa da 19.5 a 20. Se *C* acquista due azioni dall’oceano, la distribuzione delle quote diviene (20, 15, 6) e quella dei poteri (1/3, 1/3, 1/3). La ripartizione del potere rimane invariata anche se *C* acquista trenta azioni. La situazione cambia solo se *C* acquista trentuno azioni; in tal caso la distribuzione delle quote diventa (20, 15, 35) e quella dei poteri (1/6, 1/6, 2/3). Con un’ulteriore azione, *C* acquisisce la maggioranza da solo e il suo potere sale al 100%.

Anche nel caso dell'indice di Martin-Banzhaf-Coleman, pur avendosi diverse variazioni di potere (0 → 1/5 → 1/3 → 3/5 → 1), gli stocks critici sono gli stessi che abbiamo sopra indicato.

Una maggiore evidenza di questi comportamenti si ha nella fig. 5, che è analoga alla fig. 4, con la sola differenza che il punto si muove lungo il piano verticale passante per l'asse w_C, restando invariato il rapporto fra i numeri di azioni di *A* e di *B*.

In [Gambarelli, 1983] è stato provato che anche in questi casi, comunque si definisca l'indice di potere (purché fortemente monotòno), il potere coalizionale dello scalatore (il cosiddetto "raider", che qui è l' *i*-esimo giocatore) è una funzione a scala monotòna del numero di azioni acquistate dai piccoli azionisti.

Gli stocks critici d_S sono generati dalla seguente formula:

$$d_S = -\frac{M}{tb_i - q} - w_i$$

ove $M = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{n} (tb_h - q) w_h$

con la condizione $M \geq 0$ per $b_i = 0$; $M \leq 0$ per $b_i = 1$.

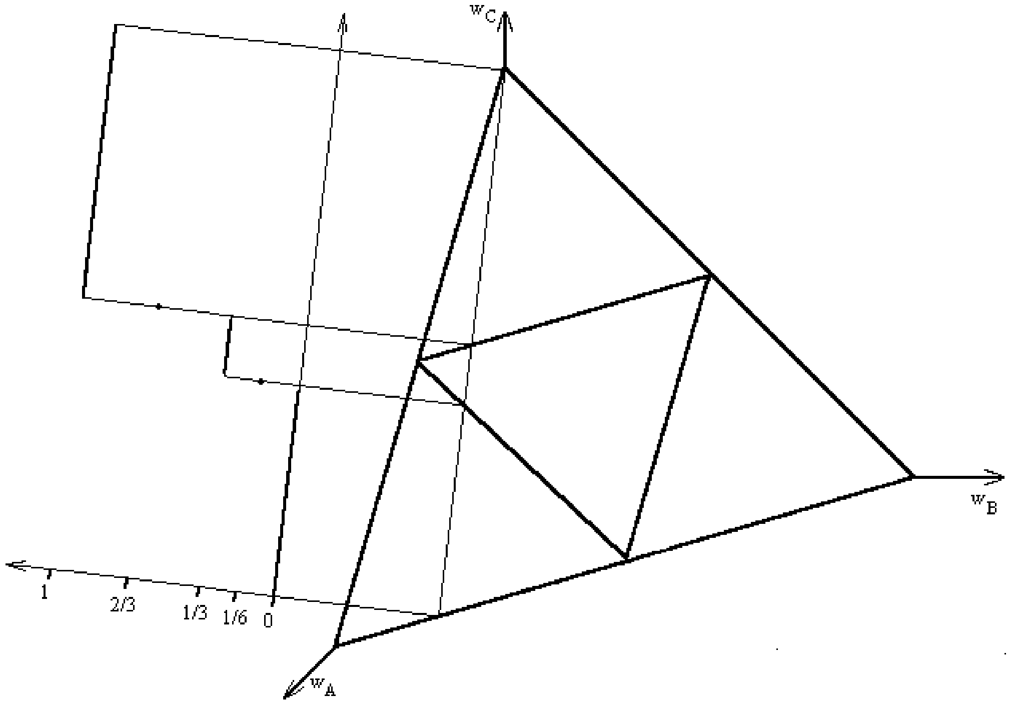

fig. 5

Nel caso dell'esempio, il giocatore interessato è il terzo (i = 3). Inizialmente t = 39, q = 19.5, w = (20, 15, 4) e tali valori mutano al crescere di w_3. La formula, con opportuni arrotondamenti, fornisce allora i punti critici 5, 6, 35 e 36.

Notiamo che il modello qui proposto si differenzia da quelli classici sui giochi oceanici (v. ad es. [Milnor e Shapley, 1961]) in quanto presuppone l'intero potere concentrato fra i soli grossi azionisti. In tal modo esso si adatta più specificamente ai mercati imperfetti e ad informazione incompleta, ove i "piccoli" sono di fatto esclusi dal consiglio di amministrazione e il raider dispone di mezzi, oltre che di informazioni, di entità tale da rendere trascurabile l'influenza diretta dei componenti l'oceano che non siano in grado di coalizzarsi (in effetti il presente modello descrive proprio situazioni di questo tipo, in quanto l' i-esimo giocatore potrebbe anche essere un sindacato di azionisti).

6.6) Considerazioni sui prezzi

Le scalate al controllo azionario (tecnicamente indicate con il termine takeover) possono avvenire con l'accordo dell'attuale gruppo di controllo (che in tali casi gradisce l'ingresso del nuovo azionista per motivi di politica aziendale, prospettive di sviluppo ecc.), ovvero in antitesi.

In quest'ultimo caso, lo scalatore deve prevedere un aumento del prezzo di offerta delle azioni all'aumentare della quantità richiesta. Tale aumento è artificiale rispetto al valore effettivo delle azioni (che rappresentano puramente una quota-parte dell'azienda interessata), in quanto esprime un valore aggiunto che il "raider" è disposto a pagare pur di raggiungere il controllo e i benefici connessi a tale posizione. Tali benefici possono aumentare il valore dell'azienda (ad esempio attraverso migliori politiche direzionali) ovvero danneggiarla: ad esempio attraverso l'utilizzo di fornitori, dirigenti e politiche non ottimali, ma collegate per altre vie allo scalatore, uso di informazioni interne per altri fini ecc. L'eventuale nuovo controllore potrà così influenzare indirettamente il valore delle azioni, ma tale influenza è per lo più lontana dal momentaneo aumento delle quotazioni inerente la scalata.

Un altro tipo di vantaggio ottenibile dal "raider" può essere la rivendita all'attuale gruppo di controllo, dell'intero pacchetto azionario raccolto, naturalmente con un prezzo notevolmente maggiorato: ciò creerà successive diminuzioni della quotazione del titolo, di cui pagheranno le conseguenze anche i piccoli azionisti. Per ulteriori consideraziuoni in merito segnalo [Buzzacchi e Mosconi, 1993] e [Corielli, Nicodano e Rindi, 1993].

Durante la fase di acquisizione, le prime azioni vengono usualmente rastrellate sul mercato dei "piccoli" (ed eventualmente su mercati paralleli) con operazioni il più possibile silenziose, tali da non mettere in allarme il gruppo di controllo. Dopo eventuali accordi con qualcuno dei grossi azionisti, viene lanciata l'Offerta Pubblica di Acquisto, con un prezzo fisso ed un impegno all' acquisto nel solo caso si raggiunga una quantità predeterminata.

Una valutazione a priori del prezzo da pagare per tale operazione è quindi importantissima per il "raider" e può essere effettuata sulla base di informazioni oggettive (quantità di azioni disponibili sul mercato, vicinanza alla quota di maggioranza e potenza economica dell'attuale gruppo di controllo, eventuale sottoquotazione del titolo, andamenti di analoghe operazioni nel passato ecc.) e soggettive (potenza e coesione dell' attuale gruppo di controllo, possibilità di incentivi "a latere" in grado di favorire accordi destabilizzanti ecc.).

Notiamo infine che l'andamento dei prezzi in funzione della domanda, nei mercati perfetti dovrebbe coincidere con l'andamento dell'indice di potere. Invece, nei casi più usuali in cui i piccoli azionisti sono disinteressati o di fatto impossibilitati al controllo, le due curve non coincidono: sta proprio su un'oculata valutazione a priori di questa differenza che può giocare il "raider". Il modello presentato nel paragrafo (6.5) può comunque descrivere anche gli effetti della formazione di un sindacato di piccoli azionisti interessati ad una difesa delle relative posizioni.

6.7) Quantità di sicurezza

Un importante concetto di cui non si è finora parlato riguarda la difesa della posizione di potere raggiunta attraverso gli acquisti effettuati. Non è infatti sufficiente il numero minimo di azioni che consentono l'ingresso in una certa posizione di potere, a garantirne l'effettivo impiego. Gli attuali controllori possono infatti acquistare sul mercato dei "piccoli", naturalmente a prezzi maggiorati, ulteriori azioni in modo da rigettare l'intruso al di fuori della posizione di potere acquisita (cioè, in termini geometrici, dal poliedro a potere costante raggiunto). Occorre quindi prevedere l'acquisto di una certa "quantità di sicurezza" Δs in più rispetto al punto di discontinuità s scelto. Come determinare tale quantità? E' ovvio che un acquisto tale da far raggiungere la quota di maggioranza assoluta metterebbe al riparo da ogni contromossa, ma è altresì evidente che la spesa necessaria a tale operazione potrebbe annullarne i vantaggi.

In [Gambarelli, 1991a] è stato suggerito un metodo basato sulla seguente considerazione. Nel momento in cui gli attuali controllori si rivolgessero al mercato dei piccoli azionisti per acquistare le azioni necessarie a recuperare la posizione perduta, avrebbero delle difficoltà a reperirle e dovrebbero pagare per tali azioni un prezzo ulteriormente maggiorato. Lo stesso raider potrebbe allora offrirsi di rivendere loro le azioni mancanti, a un importo tale da ripagarlo del sovrapprezzo pagato per l'acquisto. Disponendo di un attendibile modello di previsione della quotazione $p(s)$ in funzione del numero di azioni s compravendute, a partire dal prezzo iniziale p_o, l'investitore può calcolare la quantità incognita Δs uguagliando la somma dei sovrapprezzi pagati per ciascuna azione (da 0 a $s + \Delta s$) alla somma dei successivi sovrapprezzi da richiedere per ciascuna azione (da $s + \Delta s$ a $s + 2\Delta s$). Passando a un modello continuo, si tratta in sostanza di uguagliare le aree delle due regioni tratteggiate in fig. 6, deducendo l'incognita Δs dall'equazione

$$\int_0^{s+\Delta s} p(s)ds - p_o(s+\Delta s) = \int_{s+\Delta s}^{s+2\Delta s} p(s)ds - p_o\Delta s$$

Indicata $P(s)$ una primitiva di $p(s)$ nell' intervallo considerato, il problema si riduce alla ricerca del minimo Δs soluzione dell'equazione

$P(s + 2\Delta s) - 2P(s + \Delta s) = - p_o s - P(0)$

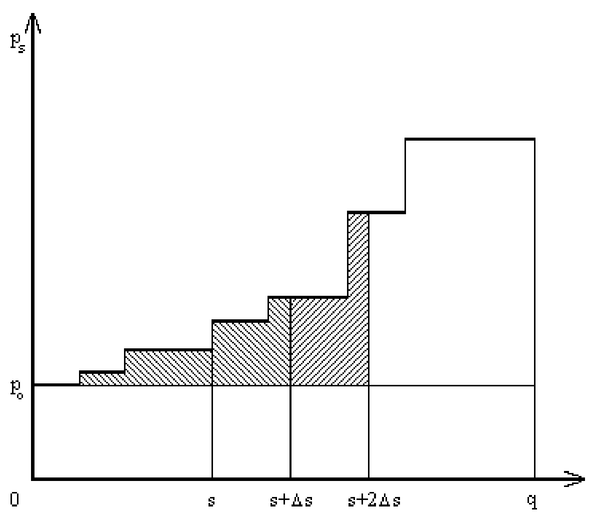

fig. 6

6.8) Controllo indiretto

Un problema di interesse sia teorico che applicativo consiste nella valutazione del controllo indiretto di un giocatore su un'assemblea. Supponiamo ad esempio che un azionista detenga il 20% di azioni di una compagnia, le cui quote restanti siano divise egualmente (40% e 40%) fra due altri investitori. Supponiamo che questa compagnia possieda il 51% delle azioni di un'altra, la quale abbia a sua volta un quarto delle azioni di una terza compagnia, le cui azioni restanti siano suddivise egualmente fra altri tre investitori. Qual'è il potere dell'azionista su quest'ultima compagnia?

Verrebbe spontanea la seguente risposta: l'azionista ha un terzo di potere sulla prima, che ha l'intero potere sulla seconda; quindi egli ha di fatto un terzo di potere sulla seconda. Quest'ultima ha un quarto di potere sulla terza, pertanto l'azionista ha (1/3)·(1)·(1/4) = 1/12 di potere sulla terza. Parrebbe, in generale, logico assegnare ad ogni investitore un controllo indiretto dato dal prodotto degli indici di potere. Vi sono peraltro dei controesempi che mostrano come un tal modo di procedere nel calcolo possa portare ad un totale di quote-parte dell'azienda diverso dal 100% Occorre quindi usare un'altra via. Il problema è stato risolto in [Gambarelli e Owen, 1994a], ove si è trovato un procedimento in grado di trasformare l'insieme dei vari giochi di maggioranza fra loro concatenati, in un unico gioco. Tale procedimento è basato sulle <u>estensioni multileari</u>, un concetto introdotto in [Owen, 1972] (v. anche [1995]). Un vantaggio di tale metodologia sta nel fatto che può venire utilizzata con qualsiasi indice di potere, in quanto si limita a costruire il gioco risultante, a cui si potrà applicare l'indice ritenuto più adatto a descrivere la situazione in esame. Il metodo succitato ha consentito di risolvere il problema per tutti i giochi concatenati privi di cicli e per una classe di giochi ciclici, mentre per i rimanenti giochi si è riconosciuta l'instabilità. Per chiarire meglio quanto sopra supponiamo che, nell'esempio di questo paragrafo, la terza azienda possieda azioni della prima (sia cioè uno degli azionisti con il 40% di azioni della prima). In tal caso può accadere che gli azionisti della prima compagnia ne eleggano il Consiglio di Amministrazione, questo concorra ad eleggere il Consiglio di Amministrazione della seconda, questo elegga il Consiglio della terza e quest'ultimo influisca per modificare il Consiglio di Amministrazione della prima, con un susseguirsi di cambiamenti senza fine. In tal caso la Teoria dei Giochi non può forzare una soluzione, ma deve limitarsi a prendere atto che il modello non converge. La situazione reale così descritta può essere stabilizzata esclusivamente con l'intervento di fattori esogeni; il modello può se mai fornire un valore statistico: ad esempio l'indice di potere medio dei vari giocatori nel corso del ciclo. Per ulteriori studi su questi argomenti segnalo [Brioschi, Buzzacchi e Colombo, 1990], [Denti e Prati, 1996] e [Salvemini, Simeone e Succi, 1995].

6.9) Un indice di destabilizzabilità

Consideriamo un insieme di m aziende suscettibili di scalata. Possiamo determinare, con criteri il più possibile obiettivi, qual è la più vulnerabile, ovvero, in generale, dare una valutazione numerica dello "stato di stabilità" di ciascuna? Una risposta è stata fornita in [Gambarelli, 1993]. Vediamo come procedere. Supponiamo di aver individuato n grossi investitori che detengono azioni di almeno una di tali aziende, mentre tutte le altre azioni sono sparse nell'oceano dei piccoli. Costruiamo la matrice A tale che il suo generico elemento a_{hk} esprime la quantità di azioni della k-esima azienda possedute dall'h-esimo investitore ($1 \leq h \leq n$) o dall' h-esima azienda ($n+1 \leq h \leq n+m$). Costruiamo, con i metodi citati nel paragrafo precedente, la matrice B il cui generico elemento b_{hk} esprime l'indice di Shapley-Shubik dell'h-esimo investitore sulla k-esima azienda (intendendo il potere distribuito solo fra i grossi investitori, escluse quindi le altre aziende).

Costruiamo ora la matrice C il cui generico elemento c_{hk} esprime il potere effettivo (in termini di indice di Shapley-Shubik) dei rappresentanti dell' h-esimo azionista nel Consiglio di Amministrazione della k-esima azienda. Il generico elemento d_{hk} della matrice $D = C - B$ esprime la differenza fra il potere teorico e quello reale; in corrispondenza dei più alti valori di d_{hk} si può quindi prevedere una maggiore insoddisfazione, da parte dell'h-esimo azionista, per la situazione della k-esima azienda. Nel calcolo degli indici di cui sopra va peraltro tenuto conto di eventuali particolari legami fra grossi azionisti (va quindi utilizzata la generalizzazione fornita in [Owen, 1977]). Indichiamo dunque d_k il massimo valore della k-esima colonna della matrice D. Tale valore esprime la massima insoddisfazione nell'ambito dell'azienda interessata (la k-esima) e concorre a formare l'<u>indice di destabilizzabilità</u> proposto in [Gambarelli, 1993]. Altri dati coinvolti nella determinazione di tale indice sono, relativamente a ciascuna azienda (per semplicità di scrittura, ometteremo l'identificazione k):

w_r il numero di azioni possedute dal "raider"

w_c il numero di azioni possedute dal gruppo di controllo ($0 \leq w_r < w_c$)

q la quota di maggioranza

p_z un prezzo di riferimento passato del titolo

p_o l'attuale quotazione del titolo

s la forza (in termini di potere politico ed economico) dell'attuale gruppo di controllo; questo parametro dà delle indicazioni sulla relativa capacità di reazione ($0 \leq s \leq 1$).

I valori soprariportati concorrono alla formazione dei seguenti indici provvisori, ciascuno dei quali varia da 0 (= massima stabilità) a 1 (= minima stabilità) dell'azienda:

$c = w_r/w_c$	rapporto fra i numeri di azioni possedute dal raider e dal gruppo di controllo
$m = (t - w_r - w_c)/t$	disponibilità di azioni residue sul mercato
$v = (q - w_c)/q$	vicinanza alla quota di controllo assoluto, da parte degli attuali controllori
$f = \max(0, (p_z - p_o)/p_z)$	è la caduta della quotazione corrente p_o rispetto a una quotazione di riferimento p_z

L'indice globale i è dunque dato da:

$$i = d^{a_1} \cdot s^{a_2} \cdot c^{a_3} \cdot m^{a_4} \cdot v^{a_5} \cdot f^{a_6}$$

ove $a_1, ..., a_6$ sono parametri esogeni positivi, che possono valere 1 in una prima approssimazione, ma che possono essere stimati con metodi statistici, sulla base di serie storiche relative ad analoghe operazioni di takeover avvenute in passato.
Notiamo infine che l'indice i risultante è ancora compreso fra 0 (= massima stabilità) e 1 (= minima stabilità).

6.10) Selezione del portafoglio

L'estensione più naturale dei risultati fin qui descritti riguarda la selezione del portafoglio, cioè la scelta, da parte di un investitore, del modo migliore di impiegare il proprio capitale in investimenti rischiosi.

I modelli classici di selezione del portafoglio suggeriscono di diversificare il capitale in diversi tipi di azioni scarsamente correlate fra loro, cioè tali che la storia passata delle relative quotazioni mostri degli andamenti dissimili, possibilmente in antitesi l'uno con l'altro, in modo che l'eventuale calo di un settore possa essere compensato da un rialzo di un altro. E' così possibile diminuire il rischio, pur con l'inevitabile riduzione delle prospettive di rendimento (tecnicamente, il problema consiste in un'ottimizzazione multiobiettivi con massimizzazione del rendimento atteso e minimizzazione del rischio; per una trattazione più generale rimando a [Szegö, 1980]).

Ora, per tornare all'argomento delle scalate azionarie, la diversificazione degli investimenti connessa alla minimizzazione del rischio è in contrasto con la concentrazione di azioni necessaria al controllo. Occorre dunque generalizzare i modelli classici di selezione del portafoglio, tenendo conto di questi aspetti ignorati in passato, ma di notevole rilevanza pratica, in quanto coinvolgono ingenti capitali.

I primi approcci in merito, dovuti ad Amihud e Barnea [1974] e a Batteau [1980], trovarono un ostacolo nella determinazione della funzione controllo, funzione che fu individuata all'inizio degli anni '80 in [Gambarelli e Szegö, 1982] e [Gambarelli, 1983] e via via perfezionata. Fu così possibile approntare in [Gambarelli, 1982] il primo modello di selezione del portafoglio che teneva conto delle possibilità di take-over. Tale modello è tuttora in fase di perfezionamento, con l'aggiunta dei risultati successivamente ottenuti e con applicazioni anche alla gestione del portafoglio, cioè alle compravendite di titoli conseguenti alla variazione delle relative quotazioni.

In sintesi, la composizione ottima del portafoglio di un investitore viene determinata tenendo conto non solo di rendimento atteso e varianza relativi agli investimenti classici, ma anche di quelli relativi agli investimenti in azioni ordinarie da utilizzare ai fini del controllo.

Una delle difficoltà connesse a questa generalizzazione sta nel fatto che, mentre nei modelli classici si contava su un prezzo certo di acquisto delle azioni, nel nuovo modello anche tale dato è aleatorio.

Il metodo consiste in:

- individuazione di un "indice di propensione al controllo" dell'investitore, che può essere messo in relazione al suo indice di avversione al rischio utilizzato nei modelli classici;
- ripartizione del capitale nelle due classi di investimenti (quelli classici e quelli in controllo), utilizzando il nuovo indice introdotto;
- individuazione dell'azienda (o delle aziende, nel caso di piccola di-

mensione rispetto al capitale disponibile) da scalare e delle quote di potere più convenienti in ciascuna;

- eliminazione, dall'insieme delle compagnie destinate agli investimenti classici, di quelle già individuate ai fini del "takeover" e delle aziende fortemente correlate con queste ultime;
- avviamento silenzioso dei primi acquisti relativi alle scalate;
- completamento dell'operazione.

Nel corso dell'applicazione del modello vengono utilizzati gli algoritmi citati nel paragrafo seguente. Per ulteriori applicazioni dei Giochi al Portafoglio segnalo [Bassetti e Torricelli, 1992] e [Gambarelli e Pesce, 2003]..

6.11) Algoritmi per applicazioni finanziarie

Sulla base di considerazioni relative a proprietà geometriche del valor Shapley, è stato costruito in [Gambarelli, 1980] un algoritmo per il calcolo di tale valore nei giochi in forma caratteristica superadditiva (cioè ove la vincita di ogni coalizione è non inferiore alla somma delle vincite di qualunque sua bipartizione); tale algoritmo è stato generalizzato in [1990] anche per giochi subadditivi. L'algoritmo è molto veloce, in quanto è lineare nel numero di coalizioni significative e utilizza un teorema di arresto precoce, al raggiungimento dell'ordine di precisione desiderato. Peraltro nei giochi di maggioranza con peso totale piccolo, il valor Shapley (che, come abbiamo visto, assume in tali casi la veste di indice di Shapley-Shubik) è più vantaggiosamente calcolabile mediante l'algoritmo [Mann e Shapley, 1962]. Quest'ultimo fu suggerito a Shapley da un'idea di Cantor secondo cui, in tali giochi, l'indice può essere espresso in una forma che non dipende dalle coalizioni, ma direttamente dai pesi dei giocatori; il risparmio è allora di ordine esponenziale, in quanto le possibili coalizioni fra n giocatori sono 2^n.

La generazione della funzione "potere" relativa a scambi di azioni fra giocatori (v. paragrafi (6.4) e (6.5)) presuppone l'uso ripetuto dell' algoritmo di Mann e Shapley in ciascuna delle regioni a potere costante. Un successivo algoritmo ai Arcaini e Gambarelli [1986] consente un ulteriore risparmio nel calcolo, in quanto genera direttamente l'incremento dell'indice a partire da ogni punto di discontinuità, tenendo conto delle informazioni che sono servite a calcolare il valore precedente. Con l'occasione è stato risolto un interrogativo sollevato da Milnor e Shapley in [1961] sulla generazione ricorsiva del valore.

Un analogo principio è stato applicato in [Gambarelli, 1996] per la generazione automatica della funzione "potere" nel caso dell'indice di

Martin-Banzhaf-Coleman. Tale algoritmo fornisce fra l'altro un metodo diretto per il calcolo di quest' ultimo indice, metodo che risulta più rapido di quello finora adottato (cioè quello suggerito da Banzhaf nella sua prima presentazione [1965]).

In conclusione, è ora disponibile un programma in grado di generare le funzioni "potere" (sia nel caso dell'indice di Shapley-Shubik che in quello dell'indice di Martin-Banzhaf-Coleman) nello scambio di azioni fra due azionisti, ovvero fra un azionista e l'oceano. Tale programma necessita di poca memoria, in quanto richiede la sola gestione di pochi vettori, e può essere abbinato ad altri algoritmi per la selezione e la gestione del portafoglio.

7) Applicazioni politiche

Alla fine del paragrafo 5 ci eravamo posti alcuni interrogativi: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Martin-Banzhaf-Coleman e magari altri indici hanno comportamenti simili, pur con valori numerici diversi? Come utilizzare queste proprietà nelle applicazioni?

Una risposta al primo quesito è stata data con l'individuazione dei poliedri a indice costante, di cui si è parlato nel sottoparagrafo 6.3. Alcune risposte al secondo quesito sono state fornite nel corso di tutto il sesto paragrafo, per le applicazioni finanziarie. Per quanto riguarda le applicazioni politiche, vediamo ora qualche risultato.

7.1) Criteri da rispettare negli arrotondamenti

Consideriamo un organismo politico composto di tre partiti che hanno ricevuto in un'elezione 11, 10 e 2 voti rispettivamente. Se i seggi da assegnare sono in tutto tre, andrebbero dati in teoria $3 \cdot 11/23 \cong 1.43$ seggi al primo, $3 \cdot 10/23 \cong 1.30$ al secondo e $3 \cdot 2/23 \cong 0.26$ al terzo (v. seconda riga della Tab. 5).

VOTI	quozienti	parti intere	seggi residui	SEGGI TOT.
11	1.43	1	1	2
10	1.30	1	0	1
2	0.26	0	0	0
23	3.00	2	1	3

Tab. 5: Ripartizione secondo il Sistema Proporzionale.

Per rendere interi i seggi si devono effettuare degli arrotondamenti, tenendo conto di ragionevoli criteri di equità: ad esempio a voti maggiori dovrebbero corrispondere seggi non inferiori ("monotonìa") a voti uguali dovrebbero corrispondere seggi uguali e in generale l'assegnazione dei seggi non dovrebbe dipendere dall'ordine con cui i partiti sono considerati ("simmetria"). Fra gli altri criteri più noti v'è il rispetto degli arrotondamenti per difetto e per eccesso: cioè il numero di seggi da assegnare a ciascun partito non deve essere inferiore al relativo quoziente esatto, arrotondato per difetto ("hare minimo"), né deve essere superiore al relativo quoziente esatto, arrotondato per eccesso ("hare massimo"). Un altro criterio di una certa rilevanza è detto della "superadditività" e consiste in quanto segue. Se un metodo di arrotondamento assegna a due partiti certi seggi, lo stesso metodo deve assegnare al partito-unione (ottenuto cioè da un'ipotetica coalizione fra i due) un numero di seggi non inferiore alla somma dei seggi assegnati ai singoli. Un criterio più recente, introdotto in [Gambarelli e Holubiec, 1990], verrà illustrato nel paragrafo 7.3.

L'applicazione di questi ed altri criteri, che sembrerebbero a prima vista irrinunciabili, può peraltro essere irrealizzabile. Ad esempio, se i partiti sono due e ricevono lo stesso numero di voti, è impossibile assegnare un numero dispari di seggi senza violare il primo criterio. In generale è stato provato che qualsiasi metodo di arrotondamento in grado di rispettare simmetria e monotonia non può rispettare congiuntamente hare massimo e superadditività.

7.2) I sistemi elettorali classici

Facciamo ora una breve presentazione dei metodi di arrotondamento più noti (gli altri sono, per lo più, ritocchi di questi).

Secondo il <u>Sistema Proporzionale</u> (o di Hamilton) a ciascun partito viene inizialmente assegnata la parte intera dei seggi teorici (nel nostro caso 1, 1, 0). I seggi residui (nel nostro caso 1) vengono assegnati ai partiti con parte frazionaria più alta (nel caso in esame al primo partito, la cui parte frazionaria è 0.43). Nell'esempio, la distribuzione risultante è quindi 2, 1, 0.

Secondo il <u>Metodo dei massimi divisori</u> (o di Hondt) si procede come segue. Si dividono i voti ricevuti dal primo partito per 1, poi per 2, per 3 ecc. finché la procedura lo renderà necessario. Si effettuano poi analoghe divisioni nel caso dei voti ricevuti dagli altri partiti. Si considerano allora i più alti quozienti (tanti, quanti sono i seggi da assegnare) e si attribuisce un seggio a ciascuno dei partiti corrispondenti a tali quozienti.

VOTI	:1	:2	:3	. . .
11	**<u>11</u>**	**<u>5.5</u>**	$3.\overline{6}$	. . .
10	**<u>10</u>**	5	$3.\overline{3}$	. . .
2	2	1	$0.\overline{6}$	. . .

Tab. 6: Ripartizione secondo il metodo dei Massimi Divisori.

Nel caso del nostro esempio (v. Tab. 6) i quozienti più alti sono, in ordine decrescente, 11, 10 e 5.5; di essi due corrispondono al primo partito (11 e 5.5) e uno al secondo partito (10). Pertanto si assegnano due seggi al primo partito e un seggio al secondo. Questa assegnazione corrisponde nell'esempio considerato a quella del Sistema Proporzionale, ma in generale può portare a risultati diversi. Il metodo dei massimi divisori può portare in generale ad assegnazioni che non rispettano l'hare massimo; Balinski e Young hanno allora introdotto in [1975] <u>il metodo dei massimi divisori con quota,</u> secondo cui le eventuali eccedenze rispetto all'arrotondamento per eccesso non vengono assegnate a quel partito; tale metodo porta peraltro altri inconvenienti. Nel caso dell'esempio, questo metodo riporta alla Tabella 6.

Nei vari sistemi, in caso di parità (fra le parti frazionarie residue o fra i quozienti più alti) si ricorre ad ulteriori metodologie: età dei candidati, sorteggi eccetera.

7.3) Il criterio degli indici di potere

Tornando al nostro esempio, osserviamo che la ripartizione percentuale dei voti porta, secondo i più usuali indici di potere, allo stesso valore dell'indice per tutti e tre i partiti. Le ripartizioni di seggi fornite dalle Tabelle 5 e 6 portano invece al primo partito la maggioranza assoluta, con conseguente ripartizione di potere (1, 0, 0). Quanto sopra (illustrato in Tab. 7) mostra quanto sia sostanzialmente antidemocratica la ripartizione ottenuta con i metodi classici. Infatti tali metodi apportano una distorsione sui poteri coalizionali dei partiti, ledendo il principio della maggioranza, fondamentale in ogni democrazia. Una spiegazione di questo fenomeno è illustrata in fig. 7. Il passaggio dai voti ai seggi implica infatti una trasformazione da un punto sul triangolo dei voti (quello più grande in figura, con vertici sui tre assi) a un punto sul triangolo dei seggi (

VOTI			SEGGI	
n.	%	potere	SP e MD	potere
11	47.83	1/3	2	1
10	43.48	1/3	1	0
2	8.70	1/3	0	0
23	100	1	3	1

Tab. 7: Esempio di distorsioni al potere coalizionale apportate dai più noti sistemi elettorali (SP = Sistema Proporzionale; MD = Massimi Divisori).

quello più piccolo). Non tutti i punti del triangolo piccolo sono però accettabili: occorre infatti che il punto di arrivo abbia tutte le coordinate intere. Si tratta in sostanza di un sottoinsieme discreto di tale triangolo, costituito dai singoli punti indicati in figura (dove, per semplicità di disegno, il numero totale di seggi da distribuire è 10). Congiungendo il vettore dei voti con l'origine, si ottiene un segmento la cui intersezione con il triangolo piccolo dà la ripartizione dei seggi secondo i quozienti esatti.

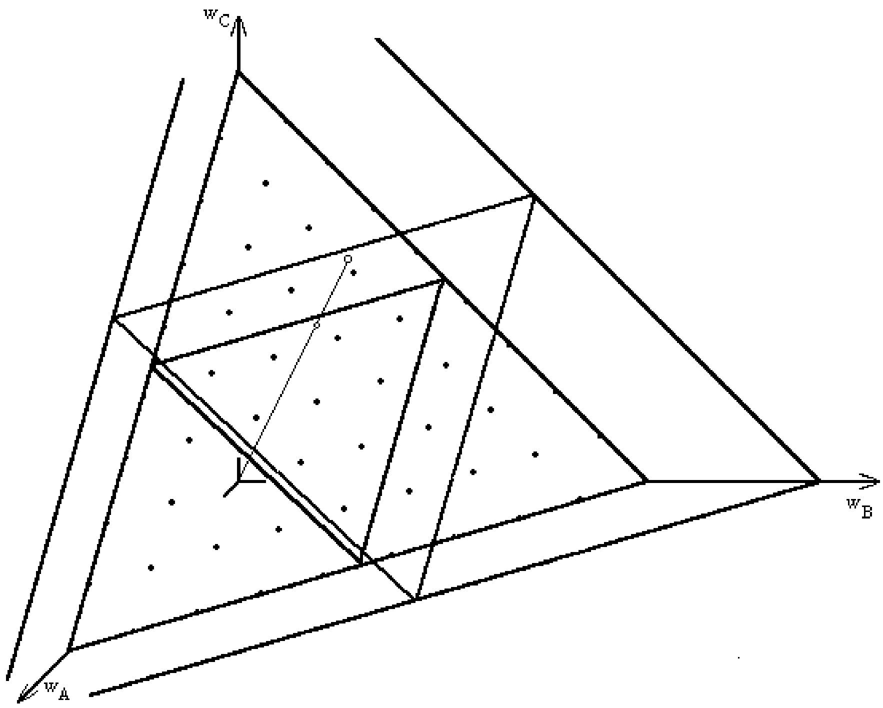

fig. 7

Se tale intersezione cade su un punto a coordinate intere, allora si ottiene la ripartizione perfetta. Altrimenti occorre valutare, fra i punti ammissibili, quello più "vicino" all'intersezione secondo una certa metrica. Può capitare che il punto così ottenuto appartenga a una regione a potere costante diversa dalla corrispondente regione a potere costante del triangolo di partenza; in tal caso si realizza la diversità degli indici di potere fra voti e seggi.

7.4) Il metodo del Minimax

Primi arrotondamenti [Gambarelli e Holubiec, 1990] con minimizzazione dell'angolo fra le due semirette uscenti dall'origine
Arrotondamenti Minimax (idea maturata con Steven Brams a Bergamo) citare [Brams, 1975] e [Brams e Fishburn, 1983].
Illustrare [Gambarelli, 1999]

7.5) Simulazioni e ottimizzazioni

Iniziamo osservando che le formule del paragrafo (6.5) possono essere applicate a problemi politico-elettorali, in quanto sono in grado di descrivere le variazioni dell'indice susseguenti all'introduzione di leggi elettorali che consentono di estendere il voto a nuove categorie di elettori (ad es. immigrati, emigrati, handicappati, carcerati, giovani ecc.) presumibilmente orientati verso un particolare partito.
Sbarramenti. Notare PDS e PSI dummy e Lega max rel.

		Poteri in caso di sbarramento del						
Partito	% 92	0 %	1 %	2 %	3 %	4-5 %	6-8 %	9 %
DC	33.1	42.2	43.2	43.6	46.2	46.2	50.0	100.0
PDS	18.1	14.1	14.6	14.5	15.4	15.4	16.7	0
PSI	14.9	13.9	14.3	14.5	15.4	15.4	16.7	0
Lega L.	8.5	8.6	9.4	8.2	11.5	7.7	16.7	-
Rif. Com.	5.8	4.9	4.8	5.5	3.8	7.7	-	-
MSI	5.3	4.5	4.4	5.5	3.8	7.7	-	-
PRI	3.9	3.1	3.0	2.7	3.8	-	-	-
PLI	2.2	1.9	1.7	1.8	-	-	-	-
Verdi	2.1	1.8	1.7	1.8	-	-	-	-
PSDI	2.0	1.7	1.7	1.8	-	-	-	-
Rete	1.6	1.3	1.2	-	-	-	-	-
Pannella	0.7	0.6	-	-	-	-	-	-
SVP	0.6	0.5	-	-	-	-	-	-
Autonom.	0.3	0.3	-	-	-	-	-	-
Altri	0.7	0.7	-	-	-	-	-	-

TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100

Tab. 8: Poteri in Italia nel caso di sbarramenti ai partiti piccoli (Camera + Senato, Aprile 1992).

Il Parlamento Europeo

Nazione	Popolazione		Seggi	
	%	Potere	Numero	Potere
Germania	18.9	19.3	81	16.6
Italia	17.7	18.7	81	16.6
Gran Bretagna	17.6	18.5	81	16.6
Francia	17.2	17.9	81	16.6
Spagna	12.0	16.5	60	13.4
Olanda	4.5	2.1	25	3.7
Portogallo	3.2	2.0	24	3.7
Grecia	3.1	1.9	24	3.7
Belgio	3.0	1.7	24	3.7
Danimarca	1.6	0.8	16	2.7
Irlanda	1.1	0.5	15	2.5
Lussemburgo	0.1	0.1	6	0.4
Totali	100.0	100.0	518	100.0

Tab. 9: Indici di potere per le Nazioni del Parlamento Europeo all'ingresso di Spagna e Portogallo.

Nel 1989 entrarono nel Parlamento due nuovi membri: Spagna e Portogallo. L'assegnazione dei seggi non creò eccessivi problemi per quest'ultimo Paese, in quanto (come si può vedere dalla seconda colonna della tab. 9) la sua percentuale di popolazione era molto vicina a quelle di Grecia e Belgio. L'assegnazione dei seggi alla Spagna creò invece qualche discussionein quanto la sua percentuale di popolazione (12.0%) la collocava fra Olanda (4.5% di popolazione e 25 seggi) e Francia (17.2% di popolazione e 81 seggi).

Come si può vedere, alla Spagna furono effettivamente assegnati 60 seggi (quantità diversa da quella corrispondente a un'interpolazione lineare fra quelli di Olanda e Francia). Ne conseguì un indice di potere, per le Nazioni più popolate, del 16.6%

In [Gambarelli e Holubiec, 1990], è stato provato che, facendo variare da 25 a 81 il numero dei seggi per la Spagna, i corrispondenti indici di potere per le Nazioni più popolate avrebbero raggiunto il valore massimo (17%) assegnando alla Spagna 57 seggi (e non 25, come ci si sarebbe potuti aspettare prima di effettuare il calcolo).

Il problema si è posto successivamente per nuove annessioni. Questo prova quanto la simulazione potrebbe essere utile, per dare ai Parlamentari un'idea dell'effetto di certe decisioni prima ancora di discuterle.

PIL [Bestini, Gambarelli e Janas, 2003]

7.6) Previsioni

Oltre che ...

Osserviamo che le formule del paragrafo (6.4) possono essere applicate per prevedere il mutarsi dei rapporti di forza in un parlamento, in seguito alla migrazione di una parte dell'elettorato da un partito ad un altro.

Ulteriori applicazioni politiche possono essere fatte utilizzando i risultati del sottoparagrafo 6.8 relativi al controllo indiretto. In effetti molti partiti sono costituiti da varie correnti, all'interno delle quali possono esservi ulteriori diversificazioni. I risultati di [Gambarelli e Owen, 1994a] si possono allora applicare alla quantificazione del potere di ciascuno di tali sotto-organismi su tutto il consesso.

• Problemi maggioranza-opposizione: [Greco, 1996]
• Survival Game [Gambarelli, 1995]
• Previsioni in Italia [Gambarelli e Greco, 1998 e 1999].

7.7) Algoritmi per applicazioni politiche

v. paragrafo (6.11)
Survival Game [Gambarelli, 1995]
Minimax Apportionments [Gambarelli, 1999]

8) Altri studi in Italia

Da qualche anno in diverse università italiane si lavora su applicazioni finanziarie della teoria dei Giochi e su applicazioni politiche della Matematica, con particolare riferimento alla teoria degli indici di potere. Citerò ora qualche contributo in merito, ma sono consapevole che si tratta di un'operazione pericolosissima, per via del rischio di involontarie omissioni (scrivevo insieme a Guillermo Owen in [1994b, pag. 38]: "Uno dei modi più rapidi per perdere molti amici in un colpo solo è scrivere un articolo di storia contemporanea"). Mi scuso quindi anticipatamente con gli esclusi e li invito ad inviarmi, insieme alle giuste rimostrnze, qualche segnalazione bibliografica in merito. Procederò in

ordine alfabetico.
In ambito finanziario ricordo dunque: a Bari [Chiarolla e Haussmann, 1996]; a Brescia [Goglione, 1996] e [Sagonti, 1991]; a Milano [Brioschi, Buzzacchi e Colombo, 1990], [Buzzacchi e Mosconi, 1993] e [Parisio, 1996]; a Modena [Bassetti e Torricelli, 1992]; a Roma [Salvemini, Simeone e Succi, 1995]; a Torino [Corielli, Nicodano e Rindi, 1993]; a Udine [Denti e Prati, 1996].
In ambito politico ricordo, fra i più recenti contributi: a Catania [Greco, 1996]; a Roma [Bernardi e Menghini, 1990], [Pennisi, 1996], [Ricca, 1996], [Ricca e Simeone, 1996].
Struttura ottima delle circoscrizioni: [Ricca, 1996] e [Ricca e Simeone, 1996].

9) Ulteriori sviluppi possibili

Oltre ai lavori in corso di perfezionamento già citati nei paragrafi precedenti (che, per comodità del lettore, riassumerò brevemente in seguito), molti potrebbero essere gli approfondimenti dei risultati fin qui ottenuti.

9.1) Possibili sviluppi in ambito finanziario

RIASSUMERE QUELLI GIA'SEGNALATI
In ambito finanziario potrebbero essere sviluppati, per una migliore descrizione della formazione delle coalizioni di controllo, molti lavori che sono stati finora applicati solo in ambito politico: ad esempio [Owen e Shapley, 1989] e [Gambarelli, 1995] (in aggiunta alle già citate generalizzazioni fornite da Owen in [1977] e [1981]).
Un altro campo di indagine che ritengo promettente riguarda un confronto fra i risultati ottenuti nei paragrafi (6.4) e (6.5), e i Giochi Oceanici. Questi ultimi considerano situazioni con un certo numero di grossi azionisti ed un oceano di piccoli azionisti, anch'essi nelle stesse condizioni dei "grossi" rispetto alla possibilità di gestire operazioni di controllo (qui sta la differenza con i modelli presentati in questo paper, che, come abbiamo visto, si applicano a mercati imperfetti).
Nei Giochi oceanici si studia il comportamento-limite degli indici di potere, al tendere a zero del peso del più grande fra i piccoli azionisti. Alcuni dei risultati ottenuti in tali giochi (ad esempio [Shapiro e Shapley 1960], [Milnor e Shapley 1961], [Aumann e Shapley 1974], [Dubey, 1975b], [Dragan e Gambarelli, 1990], potrebbero essere messi a confronto con quelli qui descritti, per trovare eventuali relazioni e discutere le principali differenze.

Lavori di taglio più applicativo sono inoltre necessari per calibrare i parametri relativi all' indice di stabilità presentato nel paragrafo (6.9), con l'utilizzo di serie storiche relative a passate operazioni di "takeover". Ancora perfezionamenti necessitano i modelli di selezione del portafoglio, in particolare per estensioni alla sua gestione.

***

Ambito Marketing: [Masullo, 1992] e [Gambarelli, 1997] (occorre implementare il software e testare casi).

***

Ambito internazionale: [Gambarelli, 1992] (Strategics) seguito da Goglione e [Gambarelli, Holubiec e Kakprzyc, 1988], [Gambarelli e Holubiec, 1993].

Golfo [Gambarelli e Piana, 1996]

9.2) Possibili sviluppi in ambito politico

RIASSUMERE QUELLI GIA'SEGNALATI
Owen: A Priori
Testare Survival Game
Multiordered: algoritmo e verificare altre
proprietà (Alabama ecc)

9.3) Possibili sviluppi in ambito teorico

Ulteriori sviluppi di carattere più teorico:

- l'estensione dei risultati ottenuti in [Gambarelli, 1990] sul valor Shapley come baricentro, al valore di Martin-Banzhaf-Coleman ed eventualmente ad altri valori. Ciò potrebbe consentire, fra l'altro, l' allestimento di algoritmi efficienti per il relativo calcolo.
- [Freixas e Gambarelli, 1997]
- Values and Power Indices for n-*person Games.*
- <u>CHANOR [Gambarelli, 2003]</u>

<u>Vedi anche argomenti per tesi</u>

Per chi volesse ampliare le sue conoscenze sugli argomenti qui trattati o preparare tesi su temi di Teoria dei Giochi suggerisco le seguenti ulteriori letture: a livello di introduzione [Gambarelli, 1997]; per approfondimenti su temi informatici o decisionali [Gambarelli e Pederzoli, 1992] e [Gambarelli e Resti, 1991]; per la preparazione di tesi scientifiche in generale [Gambarelli, 1991b] o [Gambarelli e Lucki, 1998].

Sono comunque disponibile a fornire materiale e a dedicare tempo ed energie a quanti desiderassero lavorare sull’argomento.

Bibliografia

Amihud, Y. e A. Barnea (1974) "Portfolio Selection for Managerial Control" *Omega, 2, 775-83.*

Arcaini, G. e G. Gambarelli (1986) "Algorithm for Automatic Computation of the Power Variationsin Share Trading" *Calcolo,* 23, 1, 13-9.

Aumann, R. J. e L. S. Shapley (1974) *Values of Non-Atomic Games,* Princeton University Press.

Balinski, M.L. e H.P. Young (1975) "The Quota Method of Apportionment" *American Mathematical Monthly* 82, 701-730.

Banzhaf, J. F. (1965) "Weighted Voting doesn't Work: a Mathematical Analysis" *Rutgers Law Review,* 19, 317-43.

Bassetti, A. e C. Toricelli (1992) "Optimal Portfolio Selection as a Solution to an Axiomatic Bargaining Game" *Dynamic Economic Models and Optimal Control,* Feichtinger ed., 373-84.

Batteau, P. (1980) "Approches formelles du problème du control des firmes et sociétés par actions" *Revue de l'Association Française de Finance,* 1, 1-26.

Bertini, C., G. Gambarelli e I. Stach (2003) "Apportionment Strategies for the European Parliament" (*forthcoming*).

Bernardi, C. e M. Menghini (1990) "Sistemi elettorali proporzionali. La «soluzione» italiana" *Bollettino U.M.I.,* 7, 4-A, 271-93.

Brams, S.J.(1975) *Game Theory and Politics,* Free Press, New York.

Brams, S.J. e P.C. Fishburn (1983) *Approval Voting,* Birkhauser, Boston.

Brioschi, F., L. Buzzacchi e M.G. Colombo (1990) *Gruppi di imprese e mercato finanziario,* La Nuova Italia Scientifica, Roma.

Buzzacchi, L. e R. Mosconi (1993) "Azioni di risparmio e valore di controllo: alcune evidenze empiriche e spunti di ricerca" *Centro di Economia Monetaria e Finanziaria Paolo Baffi,* Milano, 73.

Chiarolla, M.B. e G. Haussman (1996) "Central Bankand Government in a Stochastic Differential Game" *Atti delle Giornate di Lavoro AIRO,* Perugia, 675-6.

Coleman, J. S. (1964) *Introduction to Mathematical Sociology,* Free Press of Glencoe, N.Y.

Corielli, F., G. Nicodano e B. Rindi (1993) "The value of Non-voting Shares, the Structure of Corporate Control and Market Liquidity" *Centro di Economia Monetaria e Finanziaria Paolo Baffi,* Milano.

Denti, E. e N. Prati (1996) "Finding Winning Coalitions in Indirect Weighted Majority Game" *Quaderni del Dipartimento di Finanza dell'Impresa e dei Mercati Finanziari,* Università degli Studi di Udine.

Dragan, I. e G. Gambarelli (1990) "The compensatory bargaining set of a big boss game" *Libertas Mathematica,* Arlington, Texas, 10, 53-61.

Dubey, P. (1975a) "On the Uniqueness of the Shapley Value" *International Journal of Game Theory,* 4, 131-9.

---- (1975b) "Some results on values of finite and infinite games" *Technical Report, Center of Applied Mathematics,* Cornell University, Ithaca, NY, 14853.

Freixas, J. e G. Gambarelli (1997) "Common Properties among Power Indices" *Control and Cybernetics*, 26, 4, 591-603.

Gambarelli, G. (1980) "Algorithm for the Numerical Computation of the Shapley Value of a Game" *Rivista di Statistica Applicata*, 13, 1, 35-41.

---- (1982) "Portfolio Selection and Firms' Control" *Finance*, 3, 1, 69-83.

---- (1983) "Common Behaviour of Power Indices" *International Journal of Game Theory*, 12, 4, 237-44.

---- (1990) "A New Approach for Evaluating the Shapley Value" *Optimization*, 21, 3, 445-52.

---- (1991a) "Political and Financial Applications of the Power Indices" *Decision Processes in Economics*, G. Ricci ed., Springer, Berlin-Heidelberg, 84-106.

---- (1991b) *Come preparare la tesi scientifica di laurea o dottorato, Sipiel, Milano.*

---- (1992) "Strategics for the Repayment of External Debt" *Proceedings of the International Conference on Information and Systems*, Dalian, China (Zhang Shengkai and Zou Kaiqi eds.), Dalian Maritime University Publishing House, 566-573.

---- (1993) "An index of Stability for Controlling Shareholders" *Modelling Reality and Personal Modelling: Proc. of the EURO Working Group of Financial Modelling Meeting,* Curaçao (R. Flavell ed.). Physica-Verlag, Heidelberg, 116-27.

---- (1994a) "Sistemas Electorales y procesamiento de los datos" *Congreso Iberoamericano de Informatica y Derecho organizado por el Ministerio de Justicia de la Nación Argentina,* Bariloche.

---- (1994b) "Power Indices for Political and Financial Decision Making: a Review" *Annals of O.R., 51: Proceedings of the IFAC Workshop* on Support Systems for Decision and Negotiation *Processes,* Warsawa, Poland, 165-73.

---- (1995) "Survival Game: a Dynamic Approach to n-person Bargaining" *Control and Cybernetics,* 24, 3, 243-56.

---- (1996) “Takeover Algorithms” *Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management: Proceedings of the 16-th and 17-th Euro Working Group on Financial Modelling Meetings* (M. Bertocchi, E. Cavalli and S. Komolsi eds.) Physica Verlag, Heidelberg, 212-22.

---- (1997) *Giochi competitivi e cooperativi, Cedam*, Padova.

---- (1999) “Minimax Apportionments” *Group Decision and Negotiation, 8, 6.*

---- (2003) “Transforming Games from Characteristic into Normal Form” (*forthcoming*).

Gambarelli, G. e G. Greco (1998) “I giochi della politica italiana” *Ricerca,* 10/11, 6-9.

---- (1999) “Sistemi elettorali e Teoria dei Giochi” *Periodico di Matematiche,* 6, 1.

Gambarelli, G. e J. Holubiec (1990) “Power Indices and Democratic Apportionment” *Proc. of the 8-th Italian-Polish Symposium on Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology* (M. Fedrizzi and J. Kacprzyk eds.), Onnitech Press, Warsaw, 240-55

---- (1993) “A New Approach to East-West International Economic Cooperation” *Modelling, Measurement and Control,* D, AMSE Press, 8,2,49-56.

---- (1994) “Power Indices” *Proc. of the Italian-Finnish-Polish Symposium on Systems Analysis and Decision Support Systems in Economics and Technology* (R. Kulikowski, K. Szatula and J. Kacprzyc eds.), Omnitech Press, Warsawa, Poland, 100-106.

Gambarelli, G., J. Holubiec e J. Kacprzyk (1988) “Modeling and Optimization of International Economic Cooperation via Fuzzy Mathematical Programming and Cooperative Games” *Control and Cybernetics,* 17, 4, 325-335.

Gambarelli, G. e Z. Lucki (1998) *Jak Przygotowac’ Prace Dyplomowa Lub Doktorska,* III ed. Universitas, Krakow.

Gambarelli, G. e G. Owen (1994a) “Indirect Control of Corporations” *International Journal of Game Theory,* 23, 4, 287-302.

---- (1994b) “50 Years of Game Theory” *Journal of European Business Education,* 4, 1, 30-45.

Gambarelli G. e G. Owen (2003) “Power in Poliitical and Business Structures” *Jahrbuch für Neue Politische Ökonomie,* Vol. 20 (*forthcoming*).

Gambarelli, G. e G. Pederzoli (1992) *Metodi di decisione,* Hoepli, Milano.

Gambarelli, G. e S. Pesce (2003) “Takeover Prices and Portfolio Theory”

(*forthcoming*).
Gambarelli, G. e P. Piana (1997) "The Gulf War Economic Game" *Control and Cybernetics,* 26, 2, 207-214.
Gambarelli, G. e A. Resti (1991) *Introduzione all'informatica per managers,* Angeli, Milano.
Gambarelli, G. e G. P. Szegö (1982) "Discontinuous Solutions in n-person Games" *New Quantitative Techniques for Economic Analysis, (*G.P. Szegö ed.) Academic Press, New York, 229-44.
Goglione, S. (1996) "Politics Analysis of Reentring from Foreign Debt" pres. at *X Italian Meeting of Game Theory and Aplications,* Bergamo.
Greco, S. (1996) "Power Indices for Government and Opposition Weighted Majority Games" *pres. at X Italian Meeting of Game Theory and Applications,* Bergamo.
Mann, I. e L. S. Shapley (1962) "Values of Large Games, VI: Evaluating the Electoral College Exactly" *Rand Corp.,* RM 3158, Santa Monica,CA.
Milnor, J. W. e L. S. Shapley (1961) "Values of Large Games, II: Oceanic Games" *Rand Corp.,* RM 2646, Santa Monica, CA.
Owen, G. (1972) "Multilinear Extensions of Games" *Management Science,* 18, P64-79.
---- (1977) "Values of Games with a Priori Unions" *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems,* 141, 76-88.
---- (1978) "Characterization of the Banzhaf-Coleman Index" *SIAM Journal of Applied Math.,*35.
---- (1981) "Modification of the Banzhaf-Coleman Index for Games with a Priori Unions" *Power, Voting and Voting Power* (M. J. Holler ed.), Physica, Würzburg, Germany, 232-8.
---- (1995) (III ed.) *Game Theory,* Academic Press, San Diego.
Owen, G. e L. S. Shapley (1989) "Optimal Location of Candidates in Ideological Space" *Internaional. Journal of Game Theory,* 18,3, 339-356.
Parisio, L. (1996) "Bidding for a Franchise Contract with Uncertain Demand" *pres. at X Italian Meeting of Game Theory and Applications,* Bergamo.
Pennisi, A. (1996) Indici di proporzionalità e formule elettorali proporzionali robuste, *Pubblicazioni del Dip. di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate,* Univ. di Roma La Sapienza, 20.
Ricca, F. (1996) "Algoritmi di ricerca locale per la discretizzazione elettorale" *Atti delle Giornate di lavoro AIRO,* Perugia, 634-7.
Ricca, F. e B. Simeone (1996) Political Districting: Traps, Criteria, Algorithms and Trade-offs, *Pubblicazioni del Dipartimento di Sta-*

tistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma La Sapienza, 17.

Riker, W. (1986) "The First Power Index" *Social Choice and Welfare,* 3, 293-295.

Rydqvist, K. (1985) "The Pricing of Shares with Different Voting Power and the Theory of Oceanic Games" *Stockolm School of Economics,* 4, 1-70.

Sagonti, E. (1991) "On the Strong Monotonicity of Power Indices" *International Journal of Game Theory,* 20, 13-22.

Salvemini, M.T., B. Simeone e R. Succi (1995) "Analisi del possesso integrato nei gruppi di imprese mediante grafi" *L'industria, 16, 4,* 641-62.

Shapiro, N. Z. e L. S. Shapley (1960) "Values of Large Games, I: a Limit Theorem" *Rand Corp.* RM 2646, Santa Monica, CA.

Shapley, L. S. (1953) "A Value for n-person Games" *Contributions to the Theory of Games* (H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds.), II, Princeton University Press, Princeton, 307-17.

Shapley, L. S. e M. Shubik (1954) "A Method for Evaluating the Distributions of Power in a Committee System" *American Political Science Review,* 48, 787-92.

Szegö, G. (1980) *Portfolio Theory,* Academic Press, New York.

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

CONTROLLARE SE VI SONO EDIZIONI PIù RECENTI (es. Denti-Prati, Greco, Parisio ecc.).

ELIMINARE QUELLI PRESENTATI al convegno di Bergamo, se non hanno edizioni ufficiali (es. Goglione, Parisio ecc).